

SERIES INFINITAS: PRIMERAS PROPIEDADES. ALGUNAS SERIES ESPECIALES

1. a) Para cada una de las series infinitas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n}, \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{\log(n-1)}$$

escribe los cuatro primeros términos, a_n , y las cuatro primeras sumas parciales, S_n .

b) Escribe la fórmula más sencilla posible del término n -ésimo, a_n , de las siguientes series:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \frac{9}{10} + \dots, \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12} - \frac{1}{15} + \dots$$

En ambos casos, calcula las sumas parciales, S_n , para $1 \leq n \leq 5$.

2. Escribiendo las sumas parciales como sumas telescópicas, decida la convergencia de las series correspondientes y, si procede, hállese su valor.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{n}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.$$

3. Calcular la suma de cada una de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (4 \cdot (0,1)^n + (-0,7)^n), \quad \sum_{n=2}^{\infty} \pi^{n/2} e^{-n},$$

justificando previamente su convergencia.

4. Utilizando el criterio del término general, comprueba que son divergentes las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\text{sen}(n!)}{n}\right).$$

SERIES CON TÉRMINOS NO NEGATIVOS: CRITERIOS DE CONVERGENCIA

En los siguientes ejercicios deben utilizarse los criterios vistos en clase (criterio del cociente, de la raíz, criterio de comparación) para determinar si las series convergen o no. Además de los tres anteriores, puede usarse también el llamado *criterio asintótico* de comparación: si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = L > 0$, entonces las series de números positivos $\sum_n a_n$ y $\sum_n b_n$ convergen o divergen simultáneamente.

5. Decídase la convergencia de cada una de las siguientes series positivas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2013}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{20n - 13}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - 1}{2013n^2 + 2014},$$

dando por hecho que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si y sólo si $p > 1$.

6. Estudiar si las series siguientes son convergentes o no:

$$\begin{aligned}
 a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n2^n}, & \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n, & \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-6}{n^3+1}, & \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \\
 e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^3}, & \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}, & \quad g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n+2)}{n^{3/2}}, & \quad h) \sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}-3}
 \end{aligned}$$

7. Estudiar para qué valores del parámetro α son convergentes las siguientes series:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha(n+1)}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha, \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha n}}{n^2+1}.$$

SERIES CON TÉRMINOS DE SIGNO VARIABLE

8. Compruebe si las siguientes series convergen (absoluta o condicionalmente) o divergen:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+n-6}{n^4+1}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(n^2), \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

9. Lo mismo para las series

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}, \quad b) \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2-4}}, \quad c) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{e^n}.$$

EJERCICIOS ADICIONALES

10. Sea (a_n) una sucesión de términos positivos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L > 1$. Prueba que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 \cdots a_n}$$

es convergente.

11. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas (dando una pequeña explicación) o falsas (dando un contraejemplo):

- a) Si $a_n > 0$ y $\sum a_n$ converge entonces $\sum a_n^2$ converge.
- b) Si $a_n > 0$ y $\sum a_n$ converge entonces $\sum \frac{1}{a_n}$ diverge.
- c) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ entonces $\sum (-1)^n a_n$ converge. (Obsérvese que aquí no se pide que $a_n > 0$.)
- d) Si $a_n > 0$ y a_n es monótona y no está acotada entonces $\sum a_n^{-n}$ converge.
- e) Si $a_n > 0$ entonces $\sum \left(\frac{a_n}{2a_n+1}\right)^n$ converge.